Prismi e piramidi: superficie e volume

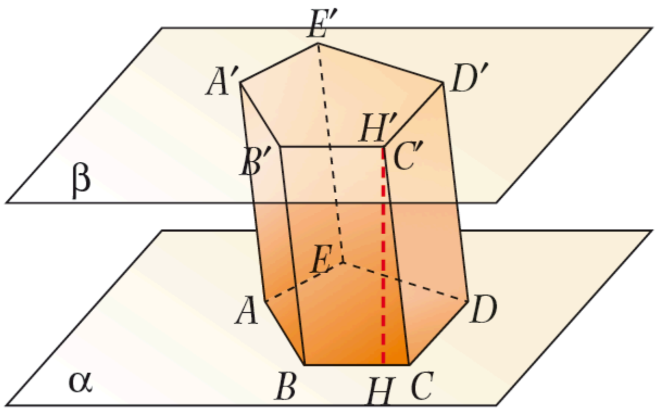
Prismi

Il **prisma** è un poliedro limitato da due poligoni congruenti disposti su piani paralleli e da tanti parallelogrammi quanti sono i lati di ciascuno dei due poligoni:

- i due poligoni congruenti sono detti **basi** del prisma e i loro lati **spigoli di base**;
- i parallelogrammi prendono il nome di **facce laterali** del prisma, i loro lati sono detti **spigoli laterali** e sono fra loro paralleli e congruenti.

Se gli spigoli laterali non sono perpendicolari alla base il prisma si dice **obliquo**.

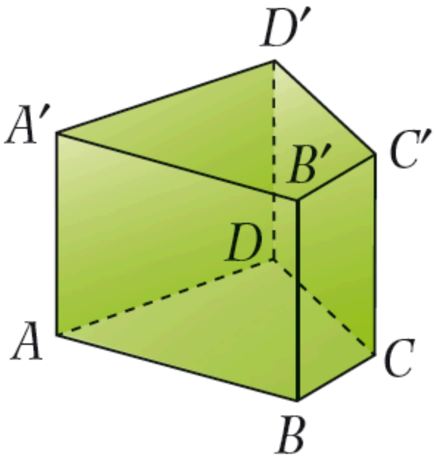
La distanza *HH′* tra i due piani paralleli su cui giacciono le basi è l’**altezza**.



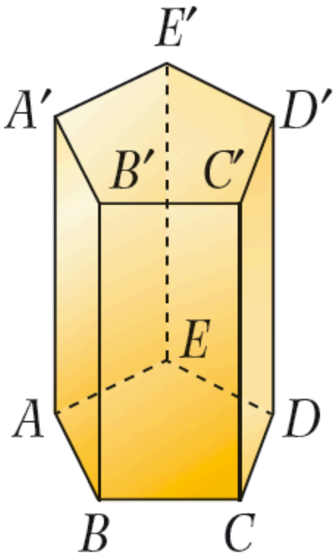
Prismi

L'insieme di tutte le facce laterali è detta **superficie laterale** del prisma. L'insieme delle facce laterali e delle due basi costituisce la **superficie totale**.

- Un prisma si dice **retto** se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi.
- Un prisma si dice **regolare** se è retto e ha per basi due poligoni regolari.



prisma retto



prisma regolare

Prismi

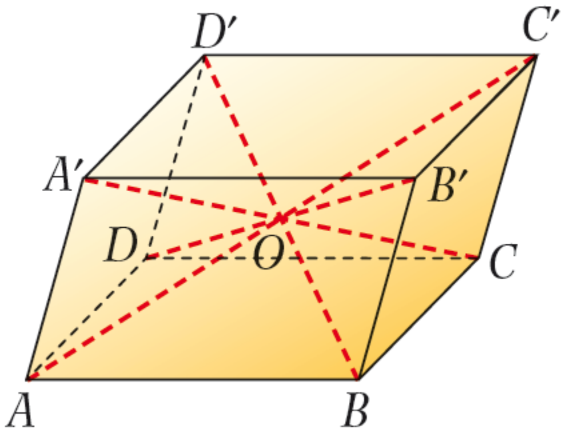
PARALLELEPIPEDO

Un prisma avente per base due parallelogrammi prende il nome di parallelepipedo.

Il parallelepipedo è limitato da sei parallelogrammi a due a due congruenti e situati su piani paralleli.

Le quattro diagonali si bisecano, cioè si incontrano in un punto *O* che è il punto medio di ciascuna:

$AO = OC'$ $BO = OD'$ $CO = OA'$ $DO = OB'$



Lattes

Prismi

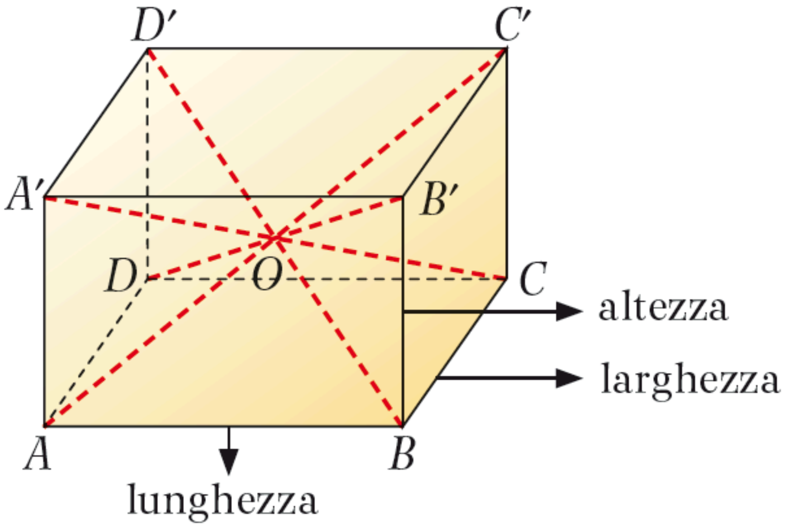
Un parallelepipedo retto avente per base due rettangoli si dice parallelepipedo rettangolo.

Il parallelepipedo rettangolo è limitato da sei rettangoli congruenti a due a due e situati su piani paralleli.

Le quattro diagonali sono congruenti fra loro e si bisecano:

$$AO = OC' = BO = OD' = CO = OA' = DO = OB'$$

I tre spigoli che escono da uno stesso vertice sono detti **dimensioni del parallelepipedo**.



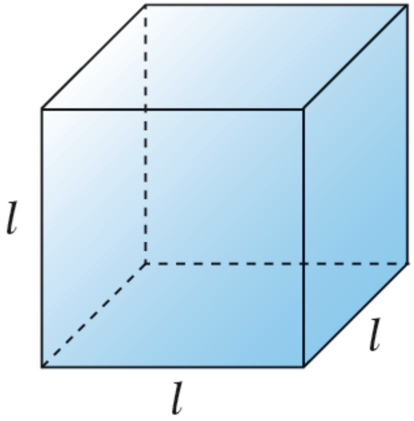
Prismi

CUBO

Un cubo è un parallelepipedo rettangolo che ha le tre dimensioni congruenti.

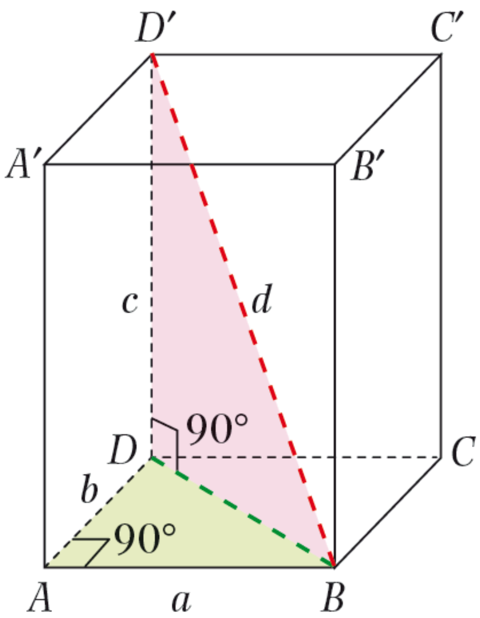
Il cubo ha gli spigoli tutti congruenti fra loro.

Le facce sono costituite da sei quadrati congruenti.



Misura della diagonale

La **diagonale** di un parallelepipedo rettangolo è il segmento che unisce due vertici non appartenenti alla stessa faccia, come per esempio *BD*′.



La **misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo** è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle tre dimensioni:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Le formule inverse ci permettono di calcolare una dimensione conoscendo le altre due e la misura della diagonale:

$$\boldsymbol{a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}}$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{d^2 - a^2 - c^2}}$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2}}$$

Misura della diagonale

Nel caso del cubo, indicando con *l* la misura dello spigolo, avremo:

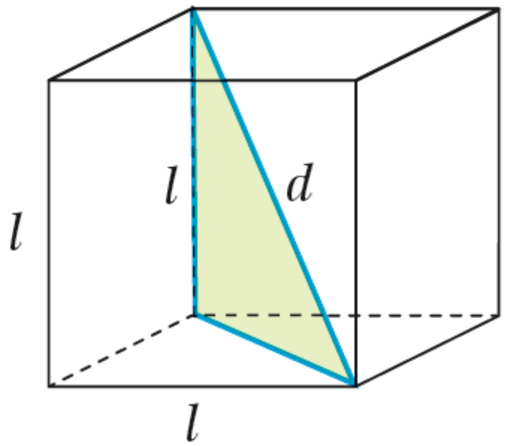
$$a = b = c = l$$

La **misura della diagonale del cubo** si ottiene moltiplicando la misura dello spigolo per $\sqrt{3}$:

$$d = \sqrt{3} \cdot l$$

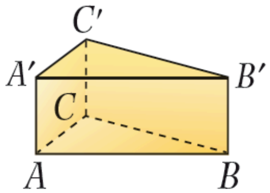
La formula inversa ci permette di calcolare la misura dello spigolo conoscendo quella della diagonale:

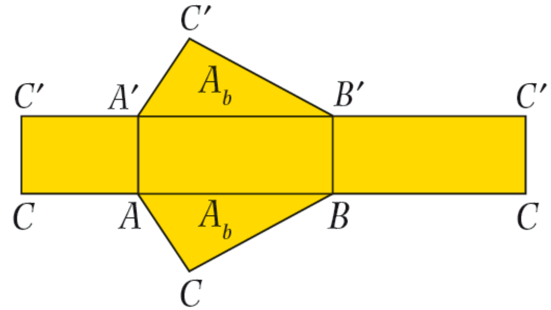
$$l = \frac{d}{\sqrt{3}}$$



Superficie dei prismi

PRISMA RETTO





Lo **sviluppo della superficie totale di un prisma retto** è costituito da:

- un rettangolo che rappresenta lo sviluppo della superficie laterale;
- due poligoni congruenti che sono le basi del prisma.

Il rettangolo ha per base il perimetro del poligono di base del prisma e per altezza l'altezza del prisma.

- L'**area della superficie laterale di un prisma retto** si ottiene moltiplicando la misura del perimetro del poligono di base per la misura dell'altezza del prisma:

  $$A_l = 2p \cdot h$$

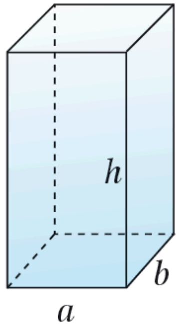
- L'**area della superficie totale di un prisma retto** si ottiene addizionando all'area della superficie laterale l'area delle due basi:

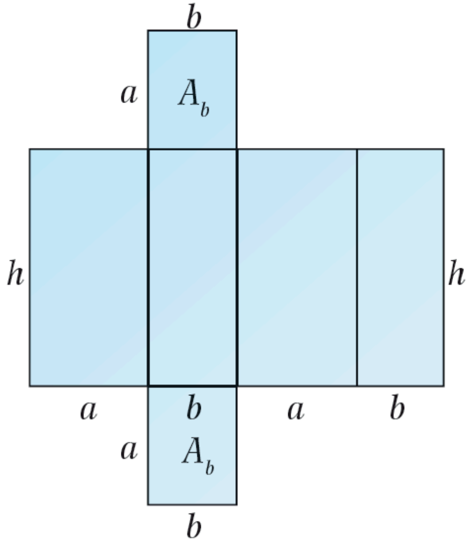
  $$A_t = A_l + 2A_b$$

Superficie dei prismi

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO

Consideriamo un parallelepipedo rettangolo di dimensioni *a*, *b*, *h* dove *a*, *b* sono le dimensioni di base e *h* è la misura dell'altezza.





- L'**area della superficie laterale di un parallelepipedo rettangolo** si ottiene moltiplicando il perimetro di base per la misura dell'altezza:

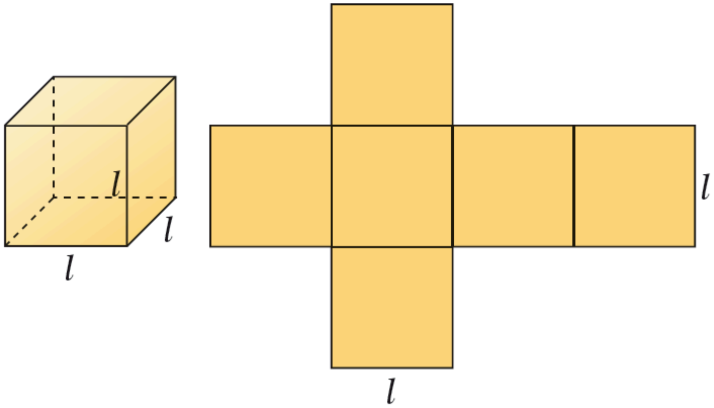
  $A_l = 2p \cdot h$

- L'**area della superficie totale di un parallelepipedo rettangolo** si ottiene addizionando l'area della superficie laterale e l'area delle due basi:

  $A_t = A_l + 2A_b$

Superficie dei prismi

CUBO



La superficie laterale del cubo è costituita da quattro quadrati congruenti di area l^2.

- L'**area della superficie laterale di un cubo** si ottiene moltiplicando per 4 il quadrato della misura di uno spigolo:

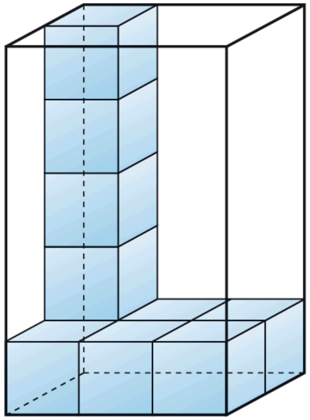
  $$A_l = 4 \cdot l^2$$

- L'**area della superficie totale di un cubo** si ottiene moltiplicando per 6 il quadrato della misura dello spigolo :

  $$A_t = 6 \cdot l^2$$

Volume dei prismi

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO



Il **volume di un parallelepipedo rettangolo** è uguale al prodotto dell'area di una sua base per la misura dell'altezza relativa:

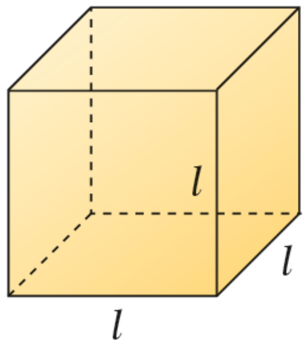
$$V_{\text{parallelepipedo}} = A_b \cdot h$$

Indicando con *a*, *b*, *c* le misure delle tre dimensioni, il volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle tre dimensioni:

$$V_{\text{parallelepipedo}} = a \cdot b \cdot c$$

Volume dei prismi

CUBO



Il cubo è un particolare parallelepipedo rettangolo con le tre dimensioni uguali allo spigolo.

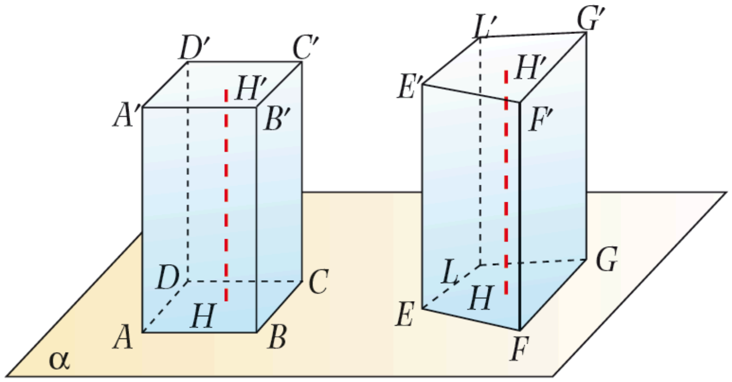
Il **volume di un cubo** si calcola elevando al cubo la misura del suo spigolo:

$$\boldsymbol{V_{cubo} = l^3}$$

Volume dei prismi

VOLUME DEL PRISMA

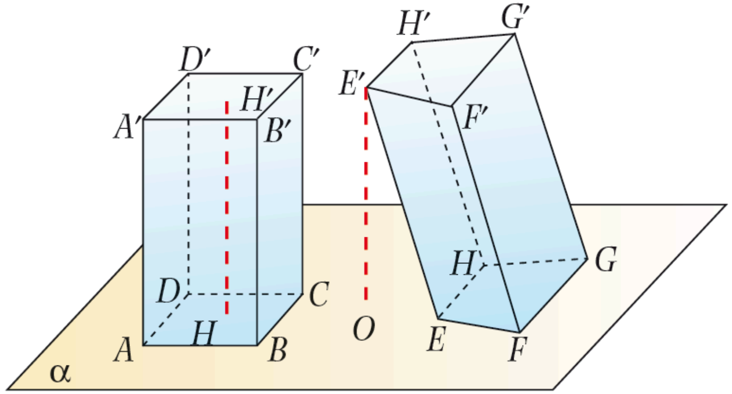
Un prisma retto e un parallelepipedo rettangolo che hanno le basi equivalenti e le altezze congruenti sono equivalenti, cioè hanno lo stesso volume.



Il **volume di un prisma retto** si ottiene moltiplicando l'area del poligono di base per la misura dell'altezza:

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$$

La stessa formula per il calcolo del volume di un prisma retto continua a essere valida anche nel caso di un prisma obliquo.

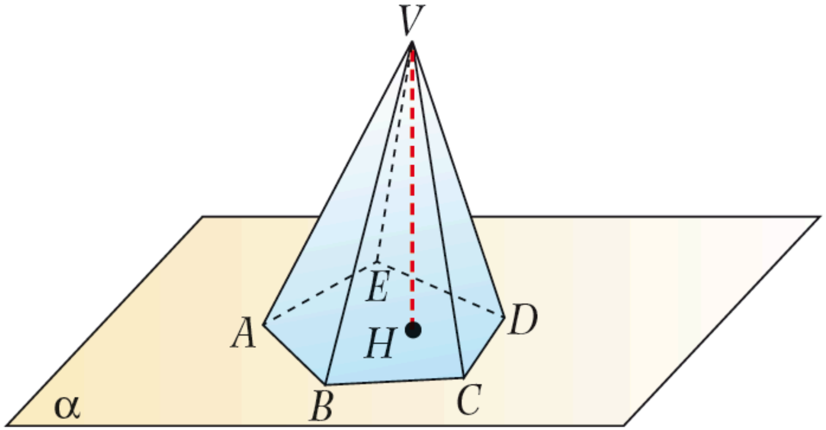


Lattes

Piramidi

La **piramide** è un poliedro limitato da un poligono di base e da tanti triangoli, quanti sono i lati del poligono, aventi un vertice in comune:

- i triangoli sono le **facce laterali** e *V* è il **vertice** della piramide;
- il poligono *ABCDE* è la **base** e i suoi lati si dicono **spigoli di base**;
- i segmenti *VA* , *VB* , *VC* , *VD* , *VE* sono gli **spigoli laterali**;
- la distanza *VH* del vertice dal piano che contiene la base è l'**altezza** della piramide.

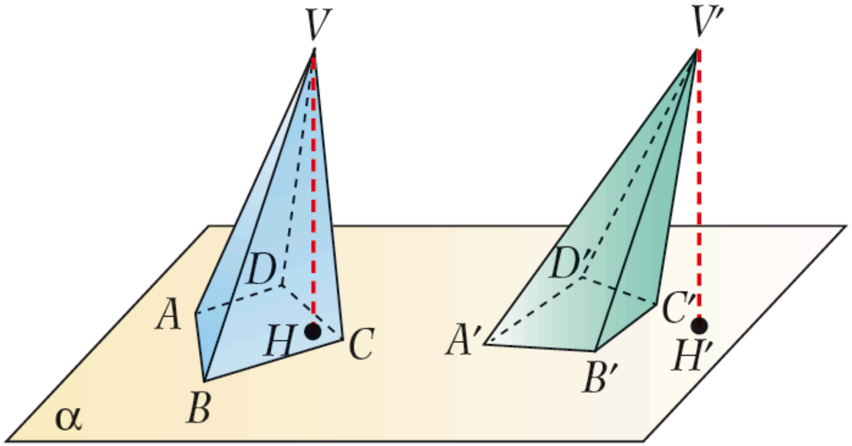


Piramidi

L'insieme delle facce laterali costituisce la **superficie laterale** della piramide.

La somma della superficie laterale e della superficie di base è la **superficie totale** della piramide.

Il **piede dell'altezza della piramide** può trovarsi all'interno o all'esterno del poligono di base.

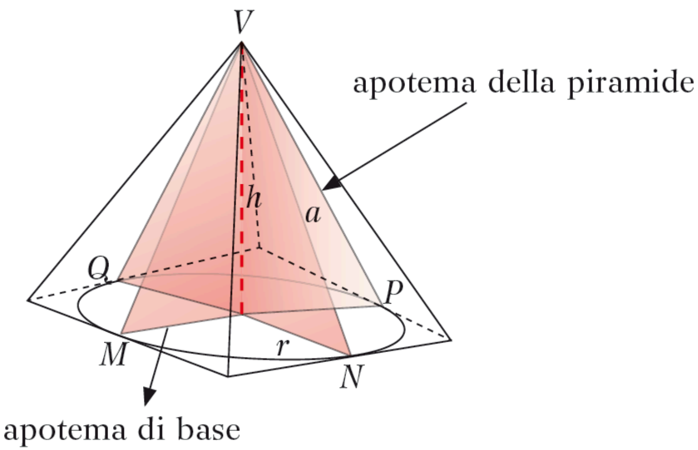


Piramidi

PIRAMIDE RETTA

La **piramide** si dice **retta** se nel poligono di base si può inscrivere una circonferenza e l'altezza della piramide cade nel centro di questa circonferenza. In caso contrario si dice **piramide obliqua**.

- Le facce laterali sono triangoli diversi, ma aventi tutti la stessa altezza che prende il nome di **apotema della piramide** e **si indica con *a***.
- L'**apotema di base** è invece l'apotema del poligono di base che è il raggio della circonferenza inscritta e **si indica con *r***.



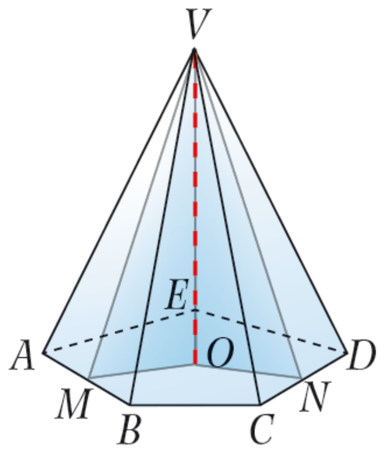
Indicando con a, h, r rispettivamente l'apotema della piramide, l'altezza e il raggio della circonferenza inscritta, applicando il teorema di Pitagora si ottiene:

$$a = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Piramidi

PIRAMIDE REGOLARE

Una piramide retta avente per base un poligono regolare è detta **piramide regolare**.



In una piramide regolare:

- tutti gli spigoli laterali sono **congruenti** fra loro:

  VA = VB = VC = VD = VE

- tutti i triangoli che formano le facce laterali sono **isosceli** e **congruenti** fra loro.

Piramidi

PIRAMIDE REGOLARE E TEOREMA DI PITAGORA

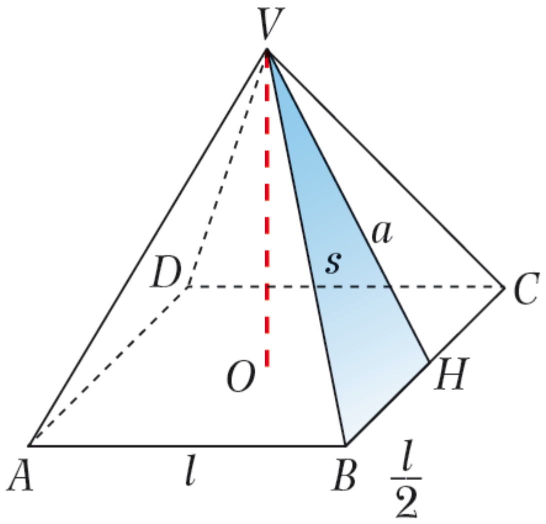
Nelle varie piramidi regolari si possono individuare dei **triangoli rettangoli** a cui applicare il **teorema di Pitagora** quando necessario.

Nel triangolo ***VHB***:

- l'ipotenusa *VB* è lo spigolo (*s*);
- il cateto *VH* è l'apotema (*a*);
- il cateto *BH* è la metà dello spigolo di base ($\frac{l}{2}$).

Applicando il teorema di Pitagora si ottiene:

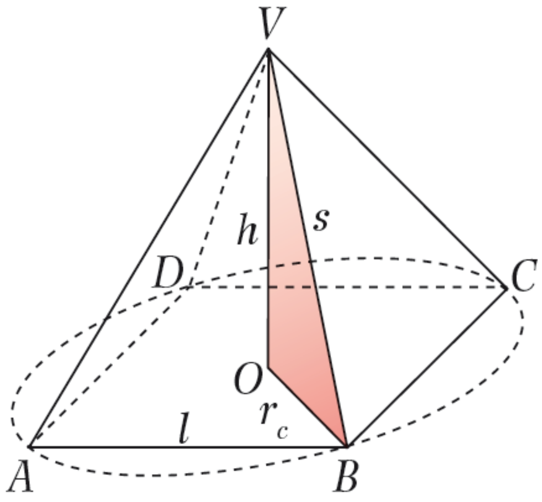
$$VB = \sqrt{VH^2 + BH^2} \qquad \text{oppure} \qquad s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$



Piramidi

Nel triangolo ***VOB***:

- l'ipotenusa *VB* è lo spigolo (*s*);
- il cateto *VO* è l'altezza (*h*);
- il cateto *OB* è il raggio della circonferenza circoscritta (r_c).



Applicando il teorema di Pitagora si ottiene:

$$\boldsymbol{VB = \sqrt{VO^2 + OB^2}}$$

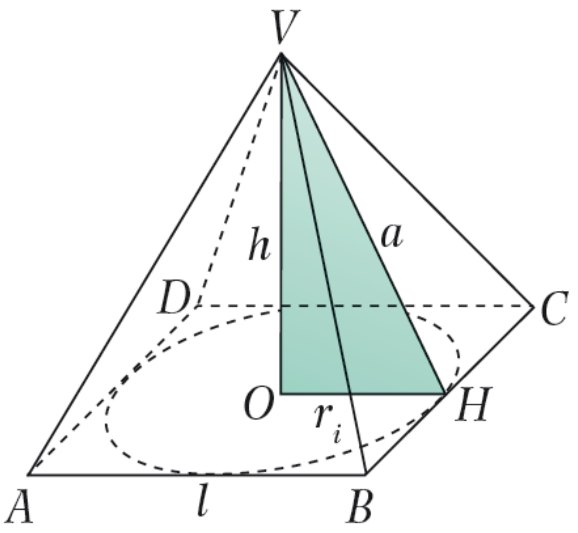
oppure:

$$\boldsymbol{s = \sqrt{h^2 + r_c{}^2}}$$

Piramidi

Nel triangolo ***VOH***:

- l'ipotenusa *VH* è l'apotema (*a*);
- il cateto *VO* è l'altezza (*h*);
- il cateto *OH* è il raggio della circonferenza inscritta (r_i).



Applicando il teorema di Pitagora si ottiene:

$$\boldsymbol{VH = \sqrt{VO^2 + OH^2}}$$

oppure:

$$\boldsymbol{a = \sqrt{h^2 + r_i^2}}$$

Superficie e volume della piramide retta

SUPERFICIE LATERALE E TOTALE

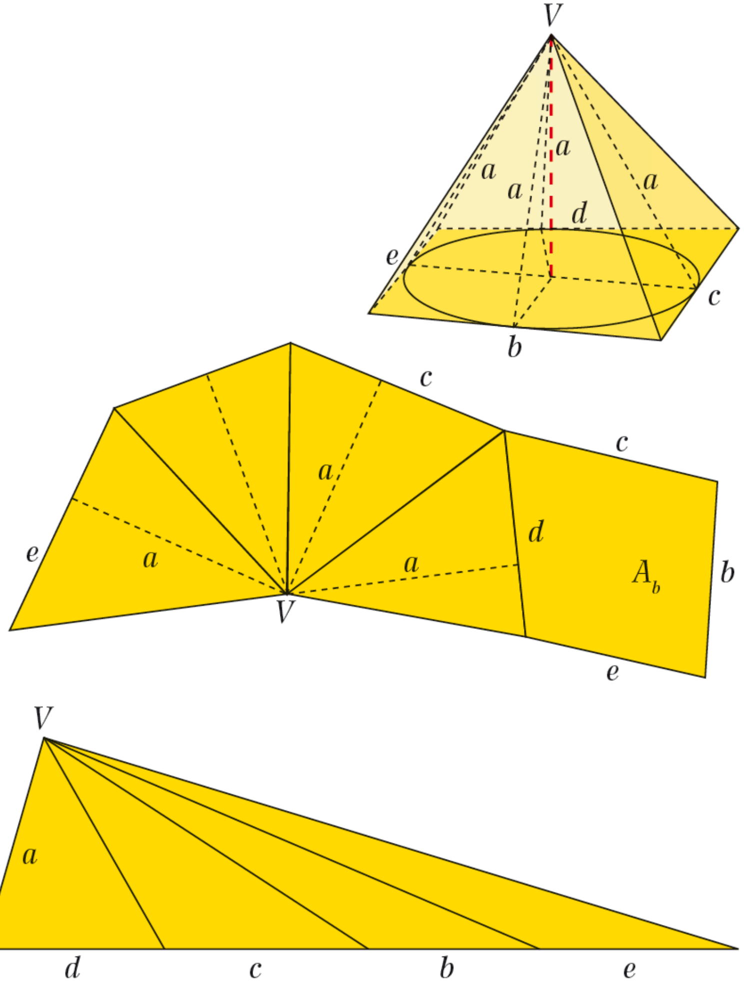
La superficie laterale di una piramide retta, costituita dalla somma di triangoli aventi tutti la stessa altezza, è equivalente a un unico triangolo avente per base la somma delle basi e per altezza la stessa altezza.

- L'**area della superficie laterale di una piramide retta** si ottiene moltiplicando il perimetro di base per la misura dell'apotema e dividendo per due il prodotto ottenuto:

$$A_l = \frac{2p \cdot a}{2}$$

- L'**area della superficie totale di una piramide retta** si ottiene addizionando all'area della superficie laterale l'area del poligono di base:

$$A_t = A_l + A_b$$



Superficie e volume della piramide retta

VOLUME

Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente la base equivalente e l'altezza congruente a quella della piramide.

Il **volume di una piramide** si ottiene moltiplicando l'area della base per la misura dell'altezza e dividendo il prodotto per tre:

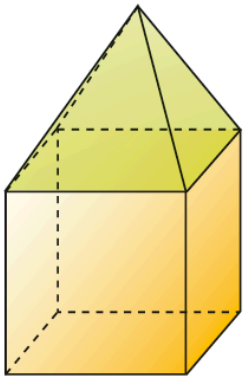
$$V_{\text{piramide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Il volume della piramide dipende solo dall'area del poligono di base e dalla sua altezza, per cui la formula per il calcolo del volume si può applicare a qualunque tipo di piramide, anche alla piramide obliqua.

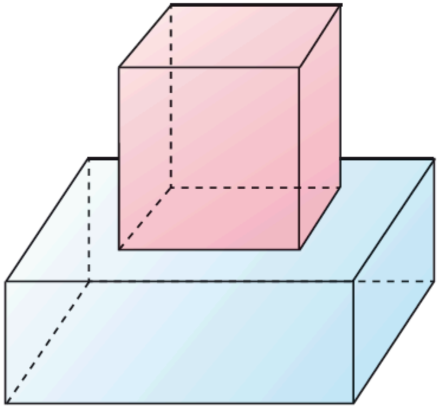
Poliedri composti

Con prismi e piramidi è possibile costruire altri poliedri, detti **poliedri composti**, che si possono ottenere:

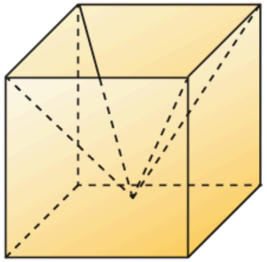
- **sovrapponendo due o più poliedri**
  - **a.** cubo + piramide
  - **b.** parallelepipedo + cubo
- **sottraendo da un poliedro un altro poliedro**
  - **c.** cubo – piramide
  - **d.** parallelepipedo – cubo



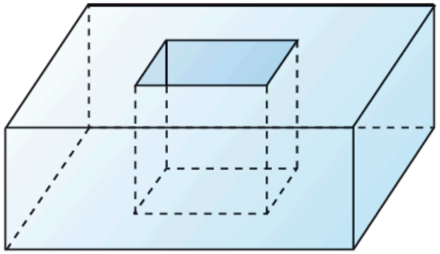
caso **a.**



caso **b.**



caso **c.**



caso **d.**

Lattes

Poliedri composti

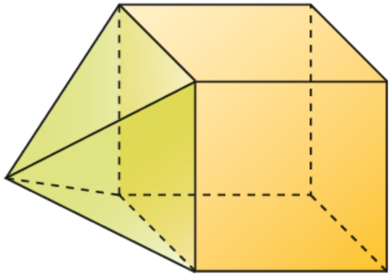
AREA DELLA SUPERFICIE TOTALE

L'**area della superficie totale di un solido composto** non è costituita da tutte le facce dei poliedri, ma solo da quella delle facce che si vedono dall'esterno e che immaginariamente si potrebbero dipingere.

VOLUME

- Il **volume di un solido ottenuto per sovrapposizione di solidi** si calcola addizionando il volume dei solidi sovrapposti:

  $$V_{\text{solido}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{piramide}}$$



- Il **volume di un solido ottenuto per inserimento di un solido nell'altro** si calcola sottraendo dal volume del solido esterno il volume del solido inserito:

  $$V_{\text{solido}} = V_{\text{cubo}} - V_{\text{piramide}}$$